

12

Cinématique et dynamique du solide indéformable

Au chapitre 2, on a établi la cinématique et la dynamique du point matériel. Dans ce chapitre, on va étendre ce modèle pour considérer la cinématique et la dynamique du solide indéformable. La première section est consacrée à la cinématique du solide indéformable et la deuxième section est consacrée à la dynamique du solide indéformable. La dernière section est consacrée au tenseur d'inertie et aux équations d'Euler.

12.1 Cinématique du solide indéformable

Au chapitre 2, on a défini le modèle du point matériel. Dans ce modèle, on attribue toute la masse d'un objet à un point qui correspond au centre de masse de l'objet. Dans ce modèle, la cinématique et la dynamique de l'objet sont entièrement déterminées par le mouvement du point matériel. En d'autres termes, on ne tient pas compte du changement d'orientation de l'objet lors de son mouvement, ce qui signifie que l'on ignore ou néglige le mouvement de rotation propre de l'objet sur lui-même autour d'un axe passant par son centre de masse. C'est la raison pour laquelle on introduit à présent un modèle plus général qui permet de rendre compte de l'orientation du solide au cours du temps. Ce modèle est le solide indéformable (Fig. 12.1).

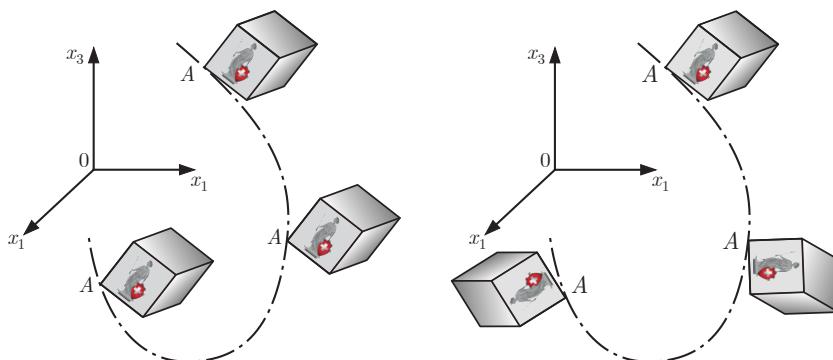


FIGURE 12.1 Sur l'image de gauche, le centre de masse du cube a un mouvement de rotation par rapport au point O , mais il n'y a pas de mouvement de rotation propre du cube. Sur l'image de droite, le cube a un mouvement de rotation propre autour de son centre de masse, car la figure allégorique *Helvetia* change d'orientation. Ce cube est un solide indéformable que l'on peut considérer comme un référentiel.

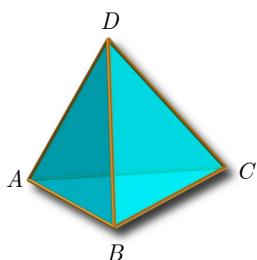
12.1.1 Solide indéformable

Un **solide indéformable** est un système constitué d'un ensemble de points matériels dont les distances relatives sont constantes. Comme les distances sont constantes, le solide indéformable ne change ni de volume ni de forme mais uniquement d'orientation spatiale. Les référentiels sont des solides indéformables. Les déformations élastiques et plastiques des solides sont le domaine d'étude de la résistance des matériaux qui dépasse largement le cadre de ce cours.

Théorème 12.1 6 coordonnées sont nécessaires pour déterminer entièrement la position et l'orientation d'un solide indéformable de forme quelconque par rapport à un référentiel donné.

Démonstration Un solide indéformable peut être considéré comme un référentiel. On peut donc complètement déterminer la position et l'orientation de tout solide indéformable à l'aide de 4 points matériels non-coplanaires. On peut donc considérer un tétraèdre régulier de longueur d'arête r dont les sommets sont les points matériels A , B , C et D , ce qui implique qu'il y a une distance r entre chaque couple de points. L'orientation respective des points A , B , C et D est choisie telle que $(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD} > 0$.

Pour déterminer la position du point A , il faut 3 coordonnées, par exemple des coordonnées cartésiennes. Le point matériel B se trouve sur la sphère de rayon r centrée au point A . Il faut donc 2 coordonnées supplémentaires pour déterminer la position du point B , par exemple deux angles. Le point matériel C se trouve sur le cercle obtenu par intersection entre les sphères de rayon r centrées en A et B . Il faut donc 1 coordonnée supplémentaire pour déterminer la position du point C , par exemple un angle. Le point matériel D se trouve au point d'intersection entre les sphères de rayon r centrées en A , B et C . A priori, il y a deux points possibles de part et d'autre du plan ABC . Cependant, la condition d'orientation respective des points matériels A , B , C et D détermine de quel côté du plan ABC se trouve le point D . Le point D est donc entièrement déterminé une fois que la position des points A , B et C est connue. Il faut donc 6 coordonnées pour déterminer la position et l'orientation d'un solide indéformable par rapport à un référentiel donné. \square



Tétraèdre



Leonhard Euler

12.1.2 Angles d'Euler

L'orientation d'un solide indéformable peut être repérée par des angles particuliers appelés **angles d'Euler**. Pour déterminer ces angles, on considère un repère cartésien $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ associé au référentiel d'inertie et un repère cartésien $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ associé au référentiel accéléré du solide en rotation autour du point O . Les angles d'Euler sont définis comme les trois angles de rotation (ϕ, θ, ψ) qui amènent le repère cartésien $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ sur le repère cartésien $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$.

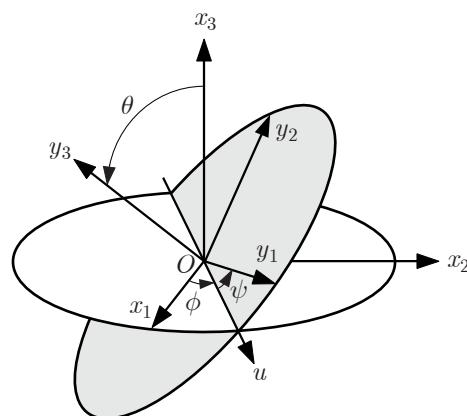


FIGURE 12.2 Repères cartésiens $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ et $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ centrés en O et angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) .

Le premier angle d'Euler est l'angle de précession ϕ autour de l'axe vertical Ox_3 qui amène l'axe horizontal Ox_1 sur l'**axe nodal** Ou (Fig. 12.3a). Le second angle d'Euler est l'angle de nutation θ autour de l'axe nodal Ou qui amène l'axe vertical Ox_3 sur l'axe Oy_3 (Fig. 12.3b). Le troisième angle d'Euler est l'angle de rotation propre ψ autour de l'axe de rotation propre Oy_3 qui amène l'axe Ou sur l'axe Oy_1 et l'axe Ov sur l'axe Oy_2 (Fig. 12.3c).

En général, les rotations ne s'additionnent pas car ce sont des applications linéaires des vecteurs de bases représentées par des matrices 3×3 qui ne commutent pas. En revanche, les rotations infinitésimales commutent toujours. Le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ de rotation du solide par rapport au référentiel d'inertie est défini à l'aide des formules de Poisson (10.23) –

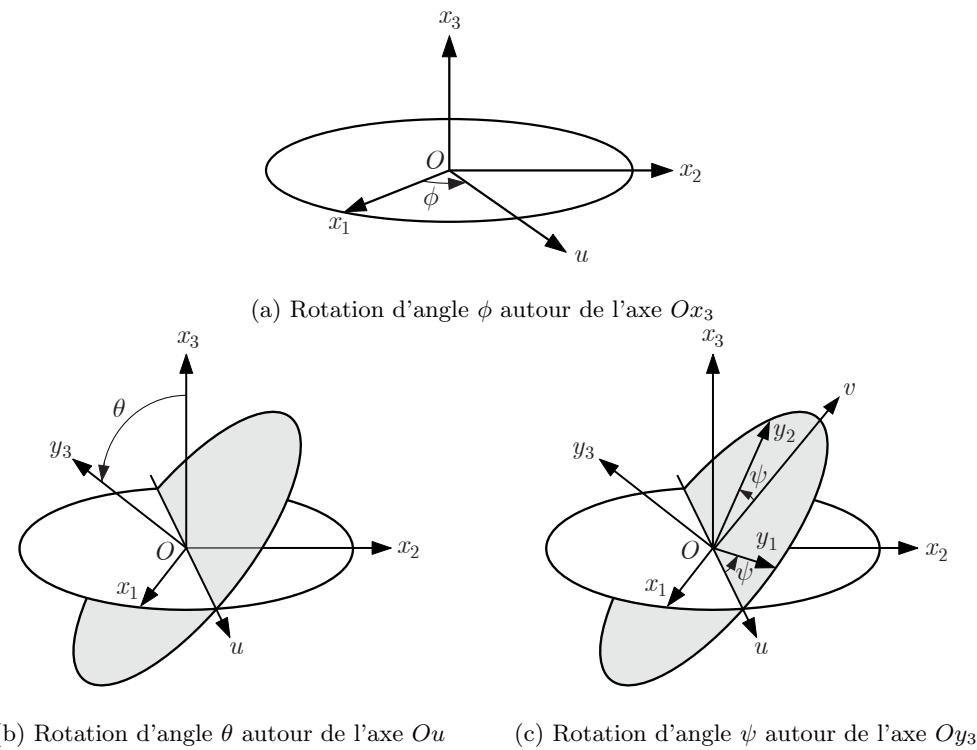


FIGURE 12.3 Rotations successives (a), (b) et (c) qui définissent les trois angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) .

décrivant des rotations infinitésimales au cours du temps – donnant les dérivées temporelles des vecteurs de base du repère lié au solide. Par conséquent, la vitesse angulaire du solide $\boldsymbol{\Omega}$ – qui est un référentiel accéléré – par rapport au référentiel d'inertie peut être exprimée comme la somme de trois vecteurs vitesse angulaire dont la norme est la dérivée temporelle d'un angle d'Euler et dont l'orientation est donnée par l'axe de rotation correspondant,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{x}}_3 + \dot{\theta} \hat{\mathbf{u}} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{y}}_3 \quad (12.1)$$

Le vecteur $\dot{\phi}$ est la vitesse angulaire de **précession** du solide indéformable autour de l'axe vertical Ox_3 . Le vecteur $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de **nutation** du solide indéformable autour de l'axe nodal Ou et le vecteur $\dot{\psi}$ est la vitesse angulaire de **rotation propre** du solide indéformable autour de l'axe de rotation propre Oy_3 .

Ces mouvements de précession, de nutation et de rotation propre sont bien illustrées par le gyroscope formé d'une sphère sur coussin d'air (Fig. 12.4).



FIGURE 12.4 Gyroscope à sphère sur coussin d'air.

Comme autres illustrations de ces mouvements, on peut mentionner la toupie chinoise, qui peut se retourner sur sa pointe par nutation, et le disque d'Euler où la vitesse angulaire du point de contact avec une surface plane diverge lorsqu'il s'arrête (Fig. 12.5).

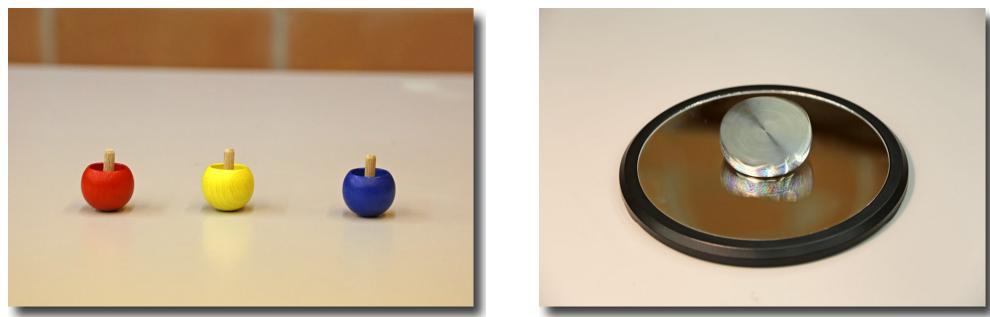


FIGURE 12.5 Toupie chinoise qui se retourne sur sa pointe et disque d'Euler.



Peter Guthrie Tait

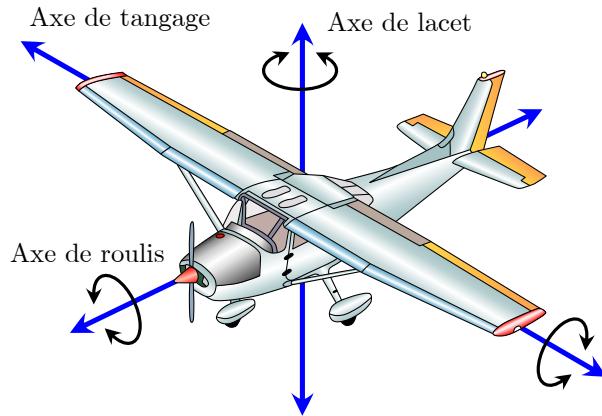


FIGURE 12.6 Angles de Tait-Bryan décrivant les lacets (précession), le tangage (nutation) et le roulis (rotation propre)

12.1.4 Vitesse et accélération d'un point du solide indéformable

On considère un repère cartésien $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ lié au référentiel d'inertie absolu qui est immobile et un repère cartésien $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ lié au référentiel relatif du solide indéformable qui est en rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport au référentiel absolu (Fig. 10.4). On aimerait exprimer la vitesse d'un point matériel P quelconque du solide en fonction de la vitesse du point matériel A à l'origine du repère et de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ qui rend compte du changement d'orientation du solide par rapport au référentiel d'inertie. Comme le solide est indéformable et que le point matériel P appartient au solide, sa vitesse relative et son accélération relative sont nulles,

$$\mathbf{v}_r(P) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_r(P) = \mathbf{0} \quad (12.2)$$

Pour alléger l'écriture, on dénote la position relative du point P et les vitesses et accélérations absolues des points A et P comme,

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &\equiv \mathbf{r}_r(P) & \mathbf{V}_A &\equiv \mathbf{v}_a(A) & \mathbf{V}_P &\equiv \mathbf{v}_a(P) \\ \mathbf{A}_A &\equiv \mathbf{a}_a(A) & \mathbf{A}_P &\equiv \mathbf{a}_a(P) \end{aligned} \quad (12.3)$$

Compte tenu des conditions (12.2) et de la notation (12.3), l'identité entre les vitesses (10.29) – obtenue dans le cadre du mouvement relatif – pour un solide indéformable se réduit à,

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP} \quad (12.4)$$

Comme le point Q est un point matériel quelconque du solide au même titre que le point P , l'identité (12.4) implique que,

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}Q \quad (12.5)$$

La différence entre les relations (12.5) et (12.4) s'écrit,

$$\mathbf{V}_Q - \mathbf{V}_P = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{A}Q - \mathbf{A}P) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}Q \quad (12.6)$$

Cette relation est remise en forme comme,

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{V}_P + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}Q \quad (12.7)$$

Compte tenu des conditions (12.2) et de la notation (12.3), l'identité entre les accélérations (10.43) pour un solide indéformable se réduit à,

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_A + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{A}P \quad (12.8)$$

Comme le point Q est un point matériel quelconque du solide au même titre que le point P , l'identité (12.8) implique que,

$$\mathbf{A}_Q = \mathbf{A}_A + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}Q) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{A}Q \quad (12.9)$$

La différence entre les relations (12.9) et (12.8) s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_Q - \mathbf{A}_P &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{A}Q - \mathbf{A}P)) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times (\mathbf{A}Q - \mathbf{A}P) \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}Q) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{P}Q \end{aligned} \quad (12.10)$$

Cette relation est remise en forme comme,

$$\mathbf{A}_Q = \mathbf{A}_P + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}Q) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{P}Q \quad (12.11)$$

12.1.5 Roulement et glissement

Sur le plan pratique, on est souvent confronté à des solides indéformables qui roulent sur une surface horizontale ou un plan incliné. Ces solides sont en général des cylindres ou des sphères. La cinématique de ce roulement peut être décrite dans le plan vertical qui passe par le centre de masse G de l'objet. Dans ce plan, l'objet en coupe est un cercle. Le point matériel C est le point de contact entre le cercle et la surface (Fig. 12.7).

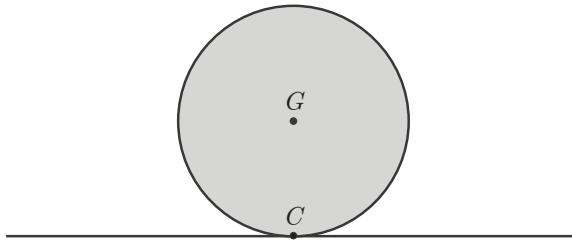


FIGURE 12.7 Roulement et glissement d'un solide

Le roulement et le glissement d'un solide indéformable sont caractérisés par la relation (12.7) qui lie la vitesse du centre de masse \mathbf{V}_G à la vitesse du point de contact \mathbf{V}_C entre le solide et la surface,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{CG} \quad (\text{roulement avec glissement}) \quad (12.12)$$

où on a procédé à l'identification suivante des points du solide $G \equiv Q$ et $C \equiv P$. Ainsi, si premièrement le solide glisse et roule, la vitesse du point de contact \mathbf{V}_C et la vitesse du centre de masse \mathbf{V}_G sont non-nulles, mais elles ne sont pas égales dû au mouvement de roulement du solide. Deuxièmement, si le solide glisse sans rouler, son orientation ne change ce qui signifie que la vitesse angulaire est nulle, c'est-à-dire $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Ainsi, la condition (12.12) se réduit à la condition de glissement sans roulement est

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_C \quad (\text{glissement sans roulement}) \quad (12.13)$$

Troisièmement, si le solide roule sans glisser, la vitesse du point de contact est nulle, c'est-à-dire $\mathbf{V}_C = \mathbf{0}$, mais la vitesse du centre de masse \mathbf{V}_G est non nulle dû au roulement. Par conséquent, d'après la relation (12.7), la condition de *roulement sans glissement* (12.7) s'écrit explicitement,

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{C}\mathbf{G} \quad (\text{roulement sans glissement}) \quad (12.14)$$

Lorsque le solide roule, le point matériel qui correspond au point de contact C entre le solide et la surface change au cours du temps lors d'un mouvement de roulement sans glissement, mais à chaque instant la vitesse \mathbf{V}_C de ce point est nulle.

12.2 Dynamique du solide indéformable

Etant donné qu'un solide indéformable est un ensemble de points matériels dont les distances relatives sont fixes, le théorème de la quantité de mouvement (11.91) et le théorème du centre de masse (11.93) pour un solide indéformable sont identiques à ceux obtenus pour un système fermé de points matériels,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{P}} = M \mathbf{A}_G \quad \text{car} \quad \mathbf{P} = M \mathbf{V}_G \quad \text{et} \quad M = \text{cste} \quad (12.15)$$

De manière similaire, par rapport à un point fixe O du référentiel d'inertie, c'est-à-dire $\mathbf{V}_O = \mathbf{0}$, le théorème de la quantité de mouvement (11.95) pour un solide indéformable est identique à celui obtenu pour un système fermé de points matériels,

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O \quad (12.16)$$

Le théorème du moment cinétique (12.16) dépend du point par rapport auquel le moment cinétique et le moment de force résultant sont évalués. On aimerait à présent généraliser ce théorème à un point quelconque P qui appartient au solide et en particulier au centre de masse G . Pour ce faire, on doit d'abord établir les théorèmes de transfert du moment cinétique et du moment de forces extérieures résultants.

12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique

Pour un solide indéformable qui est un système fermé de points matériels P_α , la quantité de mouvement totale et le moment cinétique total sont la somme des quantités de mouvement et des moments cinétique des points matériels (11.87). Compte tenu des relations (11.80) et (11.88), le moment cinétique total s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \sum_{\alpha} (\mathbf{OP} + \mathbf{PP}_\alpha) \times \mathbf{p}_\alpha \\ &= \mathbf{OP} \times \mathbf{P} + \sum_{\alpha} \mathbf{PP}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{OP} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_P \end{aligned} \quad (12.17)$$

Ainsi, le théorème de transfert du moment cinétique affirme que le moment cinétique \mathbf{L}_O du solide indéformable évalué par rapport à l'origine O du référentiel d'inertie est exprimé en fonction du moment cinétique \mathbf{L}_P du solide évalué par rapport à un point quelconque P du solide indéformable comme,

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OP} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_P = \mathbf{R}_P \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_P \quad (12.18)$$

Pour le centre de masse G , le théorème de transfert du moment cinétique (12.18) s'appelle le théorème de König et s'écrit,

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OG} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_G = \mathbf{R}_G \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_G \quad (12.19)$$

Ainsi, le moment cinétique \mathbf{L}_O du solide indéformable évalué par rapport à l'origine O est la somme du moment cinétique $\mathbf{R}_G \times \mathbf{P}$ du centre de masse lié au mouvement du centre de masse et du moment cinétique \mathbf{L}_G lié au mouvement de rotation propre du solide



Johann Samuel
Koenig

indéformable autour du centre de masse. Compte tenu des théorèmes de transfert (12.18) et (12.19) du moment cinétique,

$$\mathbf{L}_P = -\mathbf{OP} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_O = (\mathbf{OG} - \mathbf{OP}) \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_G \quad (12.20)$$

Par conséquent, le théorème de transfert du moment cinétique affirme que le moment cinétique \mathbf{L}_P du solide indéformable évalué par rapport à un point P quelconque est exprimé en fonction du moment cinétique \mathbf{L}_G du solide indéformable évalué par rapport au centre de masse G comme,

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{PG} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_G \quad (12.21)$$

Le théorème de transfert du moment cinétique (12.21) évalué au point de contact C entre le solide indéformable et la surface sur laquelle il roule s'écrit,

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{CG} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_G \quad (12.22)$$

12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force

Pour un solide indéformable qui est un système fermé de points matériels P_α , la somme des forces extérieures et la somme des moments de forces extérieures sont obtenues en sommant sur l'ensemble des points matériels (11.89). Compte tenu des relations (11.81) et (11.93), la somme des moments de forces extérieures s'écrit,

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} &= \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} (\mathbf{OP} + \mathbf{PP}_\alpha) \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \\ &= \mathbf{OP} \times \sum_{\alpha} \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum_{\alpha} \mathbf{PP}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \mathbf{OP} \times M \mathbf{A}_G + \sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (12.23)$$

Ainsi, le théorème de transfert de la somme des moments de forces extérieures affirme que la somme des moments de forces extérieures $\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ exercés sur le solide indéformable et évalués par rapport à l'origine O du référentiel d'inertie est exprimé en fonction de la somme des moments de forces extérieures $\sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}}$ exercés sur le solide indéformable et évalués par rapport à un point quelconque P du solide indéformable comme,

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{OP} \times M \mathbf{A}_G + \sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}} = \sum \mathbf{R}_P \times \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}} \quad (12.24)$$

Pour le centre de masse G , le théorème de transfert de la somme des moments de forces extérieures (12.24) s'écrit,

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{OG} \times M \mathbf{A}_G + \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \sum \mathbf{R}_G \times \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \quad (12.25)$$

Ainsi, la somme des moments de forces extérieures $\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ du solide indéformable évalué par rapport à l'origine O est la somme des moments de forces extérieures exercés sur le centre de masse $\sum \mathbf{R}_G \times \mathbf{F}^{\text{ext}}$ et la somme des moments de forces extérieures $\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}}$ exercés sur le solide indéformable et évalués par rapport au centre de masse G . Compte tenu des théorèmes de transfert (12.24) et (12.25) de la somme des moments de forces extérieures,

$$\sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}} = -\mathbf{OP} \times M \mathbf{A}_G + \sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = (\mathbf{OG} - \mathbf{OP}) \times M \mathbf{A}_G + \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \quad (12.26)$$

Par conséquent, le théorème de transfert de la somme des moments de forces extérieures affirme que la somme des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_P^{\text{ext}}$ exercés sur le solide indéformable et évalués par rapport à un point P quelconque est exprimée en fonction de la somme des moments de forces extérieures $\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}}$ exercés sur le solide indéformable et évalués par rapport au centre de masse G comme,

$$\sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}} = \mathbf{PG} \times M \mathbf{A}_G + \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \quad (12.27)$$

Le théorème de transfert de la somme des moments de forces extérieures (12.21) évalué au point de contact C entre le solide indéformable et la surface sur laquelle il roule s'écrit,

$$\sum \mathbf{M}_C^{\text{ext}} = \mathbf{CG} \times M \mathbf{A}_G + \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \quad (12.28)$$

12.2.3 Théorèmes du moment cinétique par rapport à un point

Compte tenu du fait que la masse M du solide indéformable est constante, la dérivée temporelle du théorème de transfert du moment cinétique (12.18) s'écrit,

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \dot{\mathbf{R}}_P \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{R}_P \times M \dot{\mathbf{V}}_G + \dot{\mathbf{L}}_P \quad (12.29)$$

En substituant le théorème du moment cinétique (12.16) évalué par rapport au point O dans la dérivée temporelle du moment cinétique (12.29) évaluée par rapport au point O , compte tenu des identités $\mathbf{V}_P = \dot{\mathbf{R}}_P$ et $\mathbf{A}_G = \dot{\mathbf{V}}_G$, on obtient,

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{V}_P \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{R}_P \times M \mathbf{A}_G + \dot{\mathbf{L}}_P \quad (12.30)$$

En identifiant les membres de droites des relations (12.24) et (12.30), on obtient le théorème du moment cinétique évalué par rapport au point P qui appartient au solide,

$$\sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_P + \mathbf{V}_P \times M \mathbf{V}_G \quad (12.31)$$

Pour le centre de masse G , le théorème du moment cinétique (12.31) se réduit à,

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_G \quad (12.32)$$

Pour le point de contact C entre le solide indéformable et la surface sur laquelle il roule sans glisser, compte tenu de la condition de roulement sans glissement,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{0} \quad (12.33)$$

le théorème du moment cinétique (12.31) se réduit à,

$$\sum \mathbf{M}_C^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_C \quad (12.34)$$

12.3 Tenseur d'inertie et équations d'Euler

La quantité de mouvement du solide indéformable \mathbf{P} est liée à la vitesse du centre de masse \mathbf{V}_G par la relation phénoménologique (11.88),

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V}_G \quad (12.35)$$

où la masse du solide M est la constante de proportionnalité entre les vecteurs colinéaires \mathbf{P} et \mathbf{V}_G . On aimerait trouver une relation phénoménologique similaire pour lier le moment cinétique du solide indéformable \mathbf{L}_G , évalué par rapport à son centre de masse G , à sa vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\Omega}$. Dans le cas général, le vecteur moment cinétique \mathbf{L}_G n'est pas nécessairement colinéaire au vecteur $\boldsymbol{\Omega}$. Ces vecteurs sont donc liés par une application linéaire appelée le tenseur d'inertie \mathbf{I}_G du solide indéformable par rapport au centre de masse G , qui est représenté par une matrice 3×3 . Ainsi, la relation phénoménologique s'écrit,

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\Omega} \quad (12.36)$$

Sur le plan formel, un tenseur est une application linéaire qui se transforme de manière particulière lors d'un changement de référentiel.

12.3.1 Tenseur d'inertie

Compte tenu du théorème de transfert du moment cinétique (12.19), du moment cinétique (11.80) évalué à l'origine O et de la quantité de mouvement totale (11.88), le moment cinétique \mathbf{L}_G évalué au centre de masse G s'écrit,

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{L}_O - \mathbf{R}_G \times \mathbf{P} = \sum_{\alpha} (\mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} - \mathbf{O}\mathbf{G}) \times m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{G}\mathbf{P}_{\alpha} \times m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \quad (12.37)$$

L'identité entre les vitesses (12.7) pour un point P_{α} qui appartient au solide et le centre de masse du solide G s'écrit,

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}\mathbf{P}_{\alpha} \quad (12.38)$$

Compte tenu des relations (12.40) et (12.38), le moment cinétique du solide indéformable \mathbf{L}_G , évalué par rapport à son centre de masse G , s'écrit,

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_G &= \sum_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \times m_{\alpha} (\mathbf{V}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha}) \\ &= \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \right) \times \mathbf{V}_G + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha})\end{aligned}\quad (12.39)$$

A l'aide de la condition cinématique (11.70), le moment cinétique (12.39) se réduit à,

$$\mathbf{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha}) \quad (12.40)$$

Compte tenu de l'identité vectorielle (1.44),

$$\mathbf{GP}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha}) = \mathbf{GP}_{\alpha}^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{GP}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{GP}_{\alpha} \quad (12.41)$$

le moment cinétique \mathbf{L}_G peut être mise sous la forme suivante,

$$\mathbf{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\mathbf{GP}_{\alpha}^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{GP}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{GP}_{\alpha} \right) \quad (12.42)$$

Pour déterminer l'expression du tenseur d'inertie \mathbf{I}_G , on va à présent projeter le moment cinétique \mathbf{L}_G selon les vecteurs de base $\hat{\mathbf{y}}_1$, $\hat{\mathbf{y}}_2$ et $\hat{\mathbf{y}}_3$ du repère cartésien lié au solide. La décomposition du vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ dans cette base s'écrit,

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{j=1}^3 \Omega_j \hat{\mathbf{y}}_j = \sum_{j=1}^3 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) \hat{\mathbf{y}}_j \quad (12.43)$$

Compte tenu de la décomposition (12.43), la composante $L_{G,i} = \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{L}_G$ du moment cinétique s'écrit,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{L}_G &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\mathbf{GP}_{\alpha}^2 (\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}) - (\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{GP}_{\alpha}) (\mathbf{GP}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\mathbf{GP}_{\alpha}^2 (\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) - (\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{GP}_{\alpha}) (\mathbf{GP}_{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) \right) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j)\end{aligned}\quad (12.44)$$

Le moment cinétique \mathbf{L}_G est l'image du vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ par l'application linéaire tenseur d'inertie \mathbf{I}_G

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{L}_G &= \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{GP}_{\alpha}^2 \mathbb{1} - \mathbf{GP}_{\alpha} \otimes \mathbf{GP}_{\alpha}) \hat{\mathbf{y}}_j \right) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) \\ &= \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \sum_{j=1}^3 (\mathbf{I}_G \hat{\mathbf{y}}_j) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) = \hat{\mathbf{y}}_i \cdot (\mathbf{I}_G \boldsymbol{\Omega})\end{aligned}\quad (12.45)$$

où $\mathbb{1}$ est l'application linéaire identité qui envoie tout vecteur sur lui-même et le symbole \otimes représente un produit tensoriel. Le *tenseur d'inertie* \mathbf{I}_G du solide par rapport au centre de masse G s'écrit donc formellement,

$$\mathbf{I}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{GP}_{\alpha}^2 \mathbb{1} - \mathbf{GP}_{\alpha} \otimes \mathbf{GP}_{\alpha}) \quad (12.46)$$

L'application linéaire $\mathbf{GP}_{\alpha}^2 \mathbb{1}$ est représentée par la matrice diagonale 3×3 de composantes $\sum_{k=1}^3 \mathbf{GP}_{\alpha,k}^2 \delta_{ij}$ dans la base $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$. L'application linéaire $\mathbf{GP}_{\alpha} \otimes \mathbf{GP}_{\alpha}$ est représentée par la matrice symétrique 3×3 de composantes $\mathbf{GP}_{\alpha,i} \mathbf{GP}_{\alpha,j}$ dans la base $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$. La composante $L_{G,i}$ du moment cinétique s'écrit en composantes dans la base $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ comme,

$$L_{G,i} = \sum_{j=1}^3 I_{G,ij} \Omega_j \quad (12.47)$$

où les composantes $I_{G,ij}$ de la matrice 3×3 qui représente le tenseur d'inertie \mathbf{I}_G dans la base $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ s'écrivent,

$$I_{G,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j} \right) \quad (12.48)$$

Les composantes diagonales $I_{G,11}$, $I_{G,22}$ et $I_{G,33}$ du tenseur d'inertie \mathbf{I}_G s'écrivent,

$$\begin{aligned} I_{G,11} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,2}^2 + GP_{\alpha,3}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,23}^2 \\ I_{G,22} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,3}^2 + GP_{\alpha,1}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,31}^2 \\ I_{G,33} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,1}^2 + GP_{\alpha,2}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,12}^2 \end{aligned} \quad (12.49)$$

où $r_{\alpha,23}^2$ est la distance du point P_{α} à l'axe Gy_1 , $r_{\alpha,31}^2$ est la distance de ce point à l'axe Gy_2 et $r_{\alpha,12}^2$ est la distance de ce point à l'axe Gy_3 (Fig 12.8).

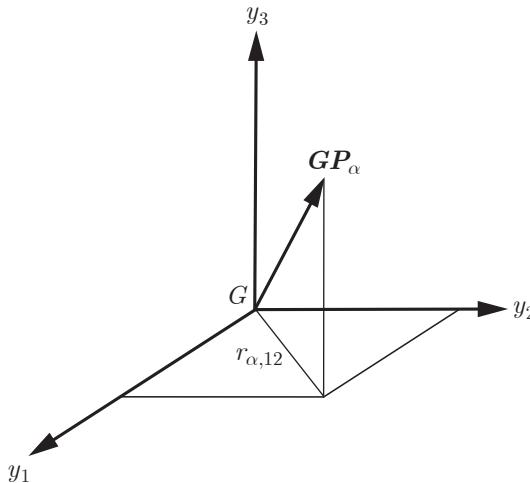


FIGURE 12.8 Distance $r_{\alpha,12}$ d'un point P_{α} à l'axe Gy_3 .

12.3.2 Moments d'inertie et axes principaux d'inertie

Les composantes $I_{G,ij}$ du tenseur d'inertie sont les éléments d'une matrice symétrique 3×3 à coefficients réels, c'est-à-dire $I_{G,ij} = I_{G,ji}$. D'après le **théorème spectral** d'algèbre linéaire, une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable. Par conséquent, il existe une base orthonormée directe de vecteurs $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ liés au solide par rapport à laquelle le tenseur d'inertie est diagonal. Le repère cartésien $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ est appelé le **repère d'inertie** et les axes Ge_1 , Ge_2 , Ge_3 sont appelés les **axes principaux d'inertie**. Par rapport au repère d'inertie, la relation phénoménologique (12.36) s'écrit en composantes comme,

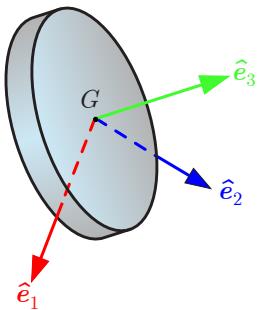
$$\begin{pmatrix} L_{G,1} \\ L_{G,2} \\ L_{G,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (12.50)$$

de manière vectorielle comme,

$$\mathbf{L}_G = \sum_{i=1}^3 L_{G,i} \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (12.51)$$

et sous forme développée comme,

$$\mathbf{L}_G = I_{G,1} \Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (12.52)$$



Repère d'inertie

Les valeurs propres du tenseur d'inertie $I_{G,1}$, $I_{G,2}$ et $I_{G,3}$ sont appelées les **moments d'inertie** et les vecteurs propres correspondants \hat{e}_1 , \hat{e}_2 \hat{e}_3 sont les vecteurs de norme unité orientés le long des axes principaux d'inertie. Les moments d'inertie sont exprimés comme,

$$I_{G,1} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,1}^2 \quad I_{G,2} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,2}^2 \quad I_{G,3} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,3}^2 \quad (12.53)$$

où $r_{\alpha,1}^2$ est la distance du point P_{α} à l'axe principal d'inertie Ge_1 , $r_{\alpha,2}^2$ est la distance de ce point à l'axe principal d'inertie Ge_2 et $r_{\alpha,3}^2$ est la distance de ce point à l'axe principal d'inertie Ge_3 .

Il existe trois types de solides indéformables, homogènes et réguliers. Le premier type est l'ellipsoïde pour lequel les trois moments d'inertie sont différents. Le deuxième type est le cylindre pour lequel le moment d'inertie $I_{G\parallel}$ le long de l'axe de symétrie est différent des deux moments d'inertie $I_{G\perp}$ perpendiculaires à cet axe qui sont égaux. Le troisième type est la sphère pour laquelle les trois moments d'inertie sont égaux (Fig. 12.9).



FIGURE 12.9 Ellipsoïde (trois moments d'inertie différents), cylindre (deux moments d'inertie différents) et sphère (trois moments d'inertie égaux).

En absence de moment de force extérieures résultant par rapport au centre de masse G , c'est-à-dire $\mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \mathbf{0}$, le théorème du moment cinétique implique que le moment cinétique par rapport au centre de masse est conservé, c'est-à-dire $\mathbf{L}_G = \text{cste}$. Si le solide a un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_3 \hat{e}_3$ autour de l'axe vertical alors le moment cinétique (12.52) s'exprime comme $\mathbf{L}_G = I_{G,3} \Omega_3 \hat{e}_3$. Par conséquent, si le moment d'inertie $I_{G,3}$ augmente, la vitesse angulaire de rotation Ω_3 diminue et vice versa. Le moment d'inertie augmente si une partie de la masse du solide s'éloigne de l'axe. Les patineuses artistiques utilisent cet effet pour accélérer ou freiner leur mouvement de rotation (Fig. 12.10).



FIGURE 12.10 Le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical est plus grand lorsque les haltères sont plus éloignées de l'axe de rotation du tabouret. En variant la distance des haltères à l'axe de rotation, on varie la vitesse de rotation angulaire.

12.3.3 Equations d'Euler

Le repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ lié au solide est un repère mobile. Les dérivées temporelles des vecteurs de base satisfont les formules de Poisson,

$$\dot{\hat{e}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{e}_i \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (12.54)$$

Pour un solide indéformable, les moments d'inertie sont constants,

$$\dot{I}_{G,i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (12.55)$$

Compte tenu de la formule de Poisson (12.54), la dérivée temporelle du moment cinétique (12.52) s'écrit alors,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_G &= \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{\mathbf{e}}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{\mathbf{e}}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_G\end{aligned}\quad (12.56)$$

Dans le cas particulier où la vitesse angulaire est constante par rapport au repère d'inertie, c'est-à-dire $\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0$, compte tenu de l'expression (12.52) du moment cinétique, la relation (12.56) se réduit à,

$$\dot{\mathbf{L}}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_G \quad (12.57)$$

et décrit la précession du vecteur \mathbf{L}_G autour du vecteur $\boldsymbol{\Omega}$. Dans le cas général, la relation (12.56) est mise sous la forme suivante,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_G &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \dot{\Omega}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \dot{\Omega}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &\quad + (\Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \times (I_{G,1} \Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \dot{\Omega}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \dot{\Omega}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &\quad + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_2 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (12.58)$$

La somme des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$ se décompose dans le repère d'inertie comme,

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \sum M_{G,1}^{\text{ext}} \hat{\mathbf{e}}_1 + \sum M_{G,2}^{\text{ext}} \hat{\mathbf{e}}_2 + \sum M_{G,3}^{\text{ext}} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (12.59)$$

En substituant les expressions (12.58) et (12.59) dans le théorème du moment cinétique (12.32) et en le projetant ensuite selon les axes de coordonnées Ge_1 , Ge_2 et Ge_3 , on obtient les **équations d'Euler** qui déterminent le mouvement de rotation propre du solide indéformable,

$$\begin{aligned}\sum M_{G,1}^{\text{ext}} &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2 \\ \sum M_{G,2}^{\text{ext}} &= I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3 \\ \sum M_{G,3}^{\text{ext}} &= I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1\end{aligned}\quad (12.60)$$

Les premiers termes des membres de droite des équations d'Euler (12.60) sont l'analogue des termes obtenus par projection du théorème de la quantité de mouvement (12.15) selon les axes principaux d'inertie,

$$\begin{aligned}\sum F_1^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,1} \\ \sum F_2^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,2} \\ \sum F_3^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,3}\end{aligned}\quad (12.61)$$

La cause de l'accélération $\dot{\mathbf{V}}_G$ du centre de masse G du solide indéformable est la résultante des forces extérieures \mathbf{F}^{ext} appliquées sur ce solide. De manière analogue, la cause de l'accélération angulaire de rotation propre $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ du solide indéformable autour d'un des axes principaux d'inertie passant par son centre de masse G est la résultante des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$ évaluée par rapport au centre de masse G . La masse M rend compte de la résistance du centre de masse G du solide indéformable à sa mise en mouvement. De manière similaire, le moment d'inertie $I_{G,i}$ rend compte de la résistance du solide indéformable à sa mise en mouvement de rotation propre autour de l'axe principal d'inertie $G \hat{\mathbf{e}}_i$. Les deuxièmes termes des membres de droite des équations d'Euler (12.60) n'ont pas d'analogue dans l'expression du théorème de la quantité de mouvement. Ils décrivent le mouvement de précession du vecteur moment cinétique \mathbf{L}_G autour du vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ qui peut avoir lieu parce que le moment cinétique \mathbf{L}_G n'est pas colinéaire à la vitesse angulaire de rotation propre $\boldsymbol{\Omega}$. Or, il n'y a pas de mouvement de précession possible du



Leonhard Euler

vecteur quantité de mouvement \mathbf{P} autour du vecteur vitesse du centre de masse \mathbf{V}_G car ces deux vecteurs sont colinéaires.